

Pauta Control 4 ALGEBRA

P1 a) Demuestre, sin usar inducción, que:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{n+1-k} \geq 2(n+1)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Concluya (justificando) que $(n+2)^{n+1} \geq 2(n+1)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) Use la conclusión de (a), e inducción, para probar que

$$2^m m! < (n+1)^m, \quad \forall m \geq 2$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) Desarrollando } \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{n+1-k} &= \binom{n+1}{0} (n+1)^{n+1} + \binom{n+1}{1} (n+1)^n + \\ &+ \binom{n+1}{2} (n+1)^{n-1} + \dots + \binom{n+1}{n+1} (n+1)^0 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(n+1)^{n+1} + (n+1)(n+1)^n}_{2(n+1)^{n+1}} + \binom{n+1}{2} (n+1)^{n-1} + \dots + 1$$

4 pts

$$= 2(n+1)^{n+1} + (\text{Terminos Positivos}) \geq 2(n+1)^{n+1}$$

$$\text{Además } \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{n+1-k} \cdot 1^k \text{ equivale a}$$

$$\text{un binomio. Así } \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{n+1-k} = [(n+1) + 1]^{n+1} = (n+2)^{n+1}$$

2 pts

$$\text{Se concluye que } (n+2)^{n+1} \geq 2(n+1)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b)i) Caso base $n=2$. Por dem q': $2^2 2! < (2+1)^2$

1 pts

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 2 < 3^2 \Leftrightarrow 8 < 9 \text{ Es verdadero.}$$

1 pts

ii) Sea $2^m m! < (n+1)^m$ algun $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ (Hip. Ind)

iii) Por dem. g': $2^{n+1}(n+1)! < (n+2)^{n+1}$

1 pto

En efecto, según (a), $(n+2)^{n+1} \geq 2(n+1)^{n+1} = 2(n+1)^n \cdot (n+1)$

y por Hip. Ind. $(n+1)^n > 2^n n!$

Entonces $(n+2)^{n+1} \geq 2 \underbrace{(n+1)^n}_{> 2^n n!} \cdot (n+1) > 2 \cdot \underbrace{2^n n!}_{> 2^{n+1} n!} \cdot (n+1) = 2^{n+1} \cdot (n+1)!$

3 pto

Así $(n+2)^{n+1} > 2^{n+1}(n+1)!$

a) Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = p \cdot n \quad \forall n \geq 1, p \in \mathbb{R}$$

b) Se pide calcular en función de n , el valor de la suma $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$ procediendo como se indica:

- 1) Escribe la suma de los términos pares, usando $k=2i$; $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
 - 2) Escribe la suma de los términos impares, usando $k=2i-1$; $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- Calcule la suma pedida al inicio.

Solución

$$a) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

3 pts

$$= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{sacando } p \\ \text{cambio de índices} \end{array} \right)$$

3 pts

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np \underbrace{\left[p + (1-p) \right]}_1^{n-1} = np.$$

es un binomio

b) 1) La suma de los pares con $k=2i$ y recorrida desde $i=1$ hasta $i=n$ será $\sum_{i=1}^n (-1)^{2i} (2i)^2 = \sum_{i=1}^n 4i^2$

1 pto

$$\sum_{i=1}^n 4i^2 = 4 \sum_{i=1}^n i^2 = 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$$

2) La suma de los impares en $k=2i-1$ e $i=1$ hasta $i=n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{2i-1}}{(-)} (2i-1)^2 = - \sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i + 1) = - \sum_{i=1}^n 4i^2 + \sum_{i=1}^n 4i - \sum_{i=1}^n 1$$

3 pts

$$= - \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) + 4 \underbrace{\sum_{i=1}^n i}_{\frac{n(n+1)}{2}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n 1}_n = - \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n$$

Así, la suma total sera $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{i=1}^n (-1)^{2i} (2i)^2 + \sum_{i=1}^n (-1)^{2i-1} (2i-1)^2 = n(2n+1)$

2 pts

Entonces $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = n(2n+1)$

OBS: no es necesario calcular cada suma ni observar que "sumando las sumas" la conclusión es mas corta